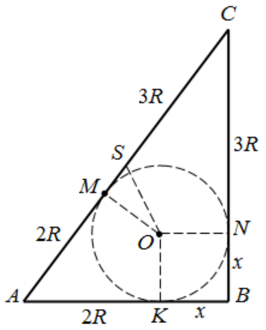
В треугольник ABC вписана окружность радиуса R, касающаяся стороны AC в точке M , причём AM=2R и CM=3R.



а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
M, N и K – точки касания вписанной окружности со сторонами AC, BC и AB соответственно. По теореме о касательных к окружности из одной точки $CM = CN = 3R$, $AM = AK = 2R$, $BN = BK = x$. Вычислим площадь S треугольника ABC через радиус вписанной окружности и по формуле Герона. Для этого сначала найдём полупериметр p:

$$p = \frac{AC + BC + AB}{2} = \frac{5R + 3R + x + 2R + x}{2} = x + 5R.$$

Через радиус вписанной окружности: $S = pR = (x + 5R) \cdot R = Rx + 5R^2$.
По формуле Герона: $S = \sqrt{(x + 5R) \cdot x \cdot 2R \cdot 3R} = \sqrt{6R^2x^2 + 30R^3x}$.
Отсюда: $\sqrt{6R^2x^2 + 30R^3x} = Rx + 5R^2 \Rightarrow 6R^2x^2 + 30R^3x = R^2x^2 + 10R^3x + 25R^4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 5x^2 + 20Rx - 25R^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4Rx - 5R^2 = 0.$$

$$D = 16R^2 + 4 \cdot 5R^2 = 36R^2;\ x = \frac{-4R \pm \sqrt{36R^2}}{2},\ \text{и т.к. } x > 0, \text{ то}$$

$x = \dfrac{-4R + 6R}{2} = R$, $BC = 4R$, $AB = 3R$, $BC^2 + AB^2 = 16R^2 + 9R^2 = 25R^2 = AC^2$. По теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник ABC прямоугольный с гипотенузой AC и катетами AB и BC.

б) Найдите расстояние между центрами его вписанной и описанной окружностей, если известно, что R=2 .

Центр описанной окружности – середина гипотенузы (точка S). OS – расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей.
$SC = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{5R}{2}$, $MS = MC - SC = 3R - \dfrac{5R}{2} = \dfrac{R}{2}$. OS – гипотенуза прямоугольного треугольника MOS, и по теореме Пифагора $OS^2 = MS^2 + OM^2 = \dfrac{R^2}{4} + R^2 = \dfrac{5R^2}{4}$.
$OS = \dfrac{R\sqrt{5}}{2}$, и т.к. $R = 2$, то $OS = \sqrt{5}$.