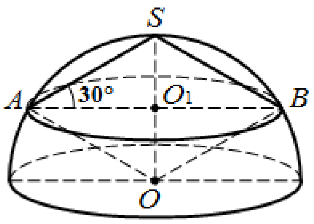
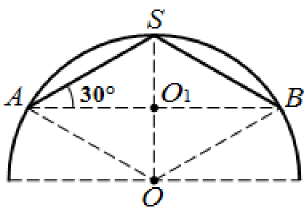
«Очень трудно найти в тёмной комнате чёрную кошку, особенно, если ее там нет.»

Конфуций.

1. Около конуса описана сфера, площадь которой равна 144π см^2. Найдите объем конуса, если его образующие наклонены к плоскости основания под углом 30°.





И даже с двумя рисунками. На правом рисунке – осевое сечение сферы. Для решения задачи этого рисунка достаточно, а левый рисунок – для развития пространственного представления. Ясно, что рисовать целиком всю сферу никакой необходимости нет.

O – центр сферы, O_1 – центр окружности основания конуса, вписанного в сферу, S – вершина конуса, SA и SB – образующие конуса. В осевом сечении сферы образующие конуса и диаметр его основания образуют равнобедренный треугольник ASB с углом SAB при основании, равным 30°.

Введём обозначения: R – радиус сферы ($OA = OS = OB = R$), r – радиус основания конуса, вписанного в сферу ($AO_1 = BO_1 = r$), h – высота конуса ($SO_1 = h$).

$$\text{Объём конуса: } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Т.к. $\angle SAB = \angle SBA = 30°$, то $\angle ASB = 180° - 2\cdot 30° = 120° \Rightarrow \angle ASO = 60°$, но ΔAOS – равнобедренный: $OA = OS$, и т.к. $\angle ASO$ при его основании – 60°, то этот треугольник – равносторонний. Значит, образующая конуса SA равна радиусу сферы: $SA = R$. Из прямоугольного треугольника ASO_1: $SO_1 = SA\cdot\sin 30° = \frac{R}{2}$, т.е. $h = \frac{R}{2}$; $AO_1 = SA\cdot\cos 30° = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r^2 = \frac{3R^2}{4}$. Подставляя найденные значения r^2 и h в формулу объёма конуса, получим:

$$V = \frac{1}{3}\pi\cdot\frac{3R^2}{4}\cdot\frac{R}{2} = \frac{\pi R^3}{8}.$$

Площадь сферы $S = 4\pi R^2$, и т.к. по условию $S = 144\pi$ см^2, то

$$4\pi R^2 = 144\pi \Leftrightarrow R^2 = 36 \Rightarrow R = 6 \text{ см}.$$

$$\text{Объём конуса: } V = \frac{\pi\cdot 6^3}{2^3} = 27\pi \text{ см}^3.$$