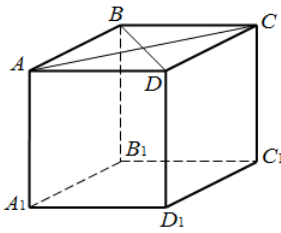


Площади боковых граней прямоугольного параллелепипеда равны 60см^2 и 100см^2 , а диагонали основания **8см^2** и $4\sqrt{13}$ см. Найдите объем параллелепипеда.



В условии ошибка! Я её выделил жирным шрифтом. Должно быть не **8см^2** , а 8 см !

Пусть для определённости $S_{ABB_1A_1} = 60\text{ см}^2$, $S_{ADD_1A_1} = 100\text{ см}^2$,
 $AC = 4\sqrt{13}\text{ см}$, $BD = 8\text{ см}$.

$4\sqrt{13} > 8$ (это неравенство равносильно неравенству $\sqrt{13} > 2$, т.е. $AC > BD$, то $\angle ABC > \angle BAD$. Поэтому $\angle BAD = \alpha$ – острый, а $\angle ABC = \pi - \alpha$ – тупой.

$$S_{ABB_1A_1} = AB \cdot AA_1, S_{ADD_1A_1} = AD \cdot AA_1 \Rightarrow \frac{S_{ABB_1A_1}}{S_{ADD_1A_1}} = \frac{AB \cdot AA_1}{AD \cdot AA_1} = \frac{AB}{AD};$$

$$S_{ABB_1A_1} = 60\text{ см}^2, S_{ADD_1A_1} = 100\text{ см}^2 \Rightarrow \frac{S_{ABB_1A_1}}{S_{ADD_1A_1}} = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}.$$

Значит, $\frac{AB}{AD} = \frac{3}{5}$. Положим $AB = 3x$, $AD = 5x$.

По теореме косинусов:

$$AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos(\angle BAD) = BD^2$$

$$\begin{cases} AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos(\angle BAD) = BD^2 \\ AC^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos(\angle ABC) = AC^2 \end{cases} \text{ и т.к. } BC = AD = 5x, \text{ то}$$

$$\begin{cases} (3x)^2 + (5x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 5x \cdot \cos \alpha = 8^2 \\ (3x)^2 + (5x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 5x \cdot \cos(\pi - \alpha) = (4\sqrt{13})^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 34x^2 - 30x^2 \cos \alpha = 64 \\ 34x^2 + 30x^2 \cos \alpha = 208 \end{cases}.$$

Сложив 2 последние равенства, получим: $68x^2 = 272 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2\text{ см}$,
 $AB = 3x = 6\text{ см}$, $AD = 5x = 10\text{ см}$, $AB \cdot AA_1 = 60 \Leftrightarrow 6 \cdot AA_1 = 60 \Leftrightarrow AA_1 = 10\text{ см}$.

$34x^2 + 30x^2 \cos \alpha = 208 \Leftrightarrow 34 \cdot 2^2 + 30 \cdot 2^2 \cdot \cos \alpha = 208 \Leftrightarrow 136 + 120 \cos \alpha = 208$ или
 $120 \cos \alpha = 72 \Leftrightarrow \cos \alpha = 0,6$, $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,6^2} = \sqrt{1 - 0,36} = \sqrt{0,64} = 0,8$

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin(\angle BAD) = 6 \cdot 10 \cdot \sin \alpha = 60 \cdot 0,8 = 48\text{ см}^2;$$

$$\text{Объём параллелепипеда: } V = S_{ABCD} \cdot AA_1 = 48 \cdot 10 = 480\text{ см}^3.$$